(Ova stranica je ostavljena prazna)

POJAM GRANIČNE VREDNOSTI

§ 1. Osnovne definicije

Funkcije celobrojnog argumenta

176. Funkcija celobrojnog argumenta uzima vrednosti

$$u_1 = 0{,}9; \quad u_2 = 0{,}99; \quad u_3 = 0{,}999 \quad \ldots \quad u_n = \underbrace{0{,}999\ldots9}_{n \text{ devetki}}; \quad \ldots$$

Koliki je $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$? Koliko mora biti n da bi apsolutna vrednost razlike $u_n - \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ bila $\leqslant 0{,}0001$?

177. Funkcija u_n uzima vrednosti:

$$u_1 = 1; \quad u_2 = \frac{1}{4}; \quad u_3 = \frac{1}{9}; \quad \ldots; \quad u_n = \frac{1}{n^2}; \quad \ldots$$

Naći $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Koliko mora biti n da bi razlika $u_n - \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ bila manja od zadatog pozitivnog broja ε?

178. Dokazati da $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ teži jedinici kad n neograničeno raste. Počev od koje vrednosti n apsolutna vrednost razlike $u_n - 1$ ne prelazi 10^{-4}?

179. Funkcija v_n uzima vrednosti

$$v_1 = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1}; \quad v_2 = \frac{\cos\pi}{2}; \quad v_3 = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{3}; \quad \ldots; \quad v_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}; \quad \ldots$$

Naći $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$. Koliko mora biti n da bi apsolutna vrednost razlike između v_n i $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$ bila ne veća od 0,001?

Da li je vrednost v_n, za bilo koje n, jednaka svojoj graničnoj vrednosti?

180. Opšti član u_n niza: $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{5}{4}$, $u_3 = \dfrac{7}{8}$, $u_4 = \dfrac{17}{16}$, ..., ima oblik: $\dfrac{2^n - 1}{2^n}$ ako je n paran, a $\dfrac{2^n + 1}{2^n}$ ako je n neparan broj.

Naći $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Koliko mora biti n da bi apsolutna vrednost razlike $u_n - \lim u_n$ bila ne veća od 10^{-4}? odnosno ne veća od datog pozitivnog broja ε?

181. Dokazati da je niz brojeva $u_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}$ monotono rastući i (kad n neograničeno raste) teži vrednosti $\dfrac{4}{3}$. Počev od kog n razlika $\dfrac{4}{3} - u_n$ ne prelazi dati pozitivan broj ε?

182. Dokazati da $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}$ teži jedinici kad n neograničeno raste. Počev od kog n vrednost $|1-u_n|$ ne prelazi dati pozitivan broj ε?

Na koji način promenljiva u_n teži svojoj graničnoj vrednosti?

183. Funkcija v_n uzima vrednosti „binomnih koeficijenata“:

$$v_1 = m, \quad v_2 = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}, \quad v_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad \ldots,$$

$$v_n = \frac{m(m-1)(m-2)\ \ldots\ m-(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}, \quad \ldots,$$

pri čemu je m ceo pozitivan broj. Naći $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

184. Pokazati da niz $u_n = 1 + (-1)^n$ nema granične vrednosti kad n neograničeno raste.

185. Dokazati da kad n neograničeno raste niz $u_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{2^n}$ nema granične vrednosti, a niz $v_n = \dfrac{2^n + (-2)^n}{3^n}$ ima grničnu vrednost. Kolika je ona?

186. Ima li graničnu vrednost niz:

$$1)\ u_n = n \sin\frac{n\pi}{2}; \quad 2)\ u_n = \frac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{\lg n}, \quad (n>1)?$$

187. Dokazati da: ako nizovi: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, i $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$, teže istoj graničnoj vrednosti a, onda i niz: $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$ teži graničnoj vrednosti a.

188. Dokazati da: ako niz $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ teži graničnoj vrednosti a, onda toj istoj graničnoj vrednosti teži i bilo koji „podniz“ ovog niza (npr. $u_1, u_3, u_5, \ldots$).

189. Dokazati da: ako niz $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ima graničnu vrednost $a \neq 0$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Šta se može kazati za ovu graničnu vrednost ako je $a = 0$? (Navesti primere).

Funkcije neprekidnog argumenta

190. Neka je $y=x^2$. Kad $x \to 2$ tada $y \to 4$. Koliko mora biti δ da bi iz $|x-2|<\delta$ sledilo $|y-4|<\varepsilon=0{,}001$?

191. Neka je $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$. Kad $x \to 2$ tada $y \to \dfrac{3}{5}$. Koliko mora biti δ da bi iz $|x-2|<\delta$ sledilo $\left|y-\dfrac{3}{5}\right|<0{,}1$?

192. Neka je $y=\dfrac{x-1}{2(x+1)}$. Kad $x \to 3$ tada $y \to \dfrac{1}{4}$. Koliko mora biti δ da bi iz $|x-3|<\delta$ sledilo $\left|\dfrac{1}{4}-y\right|<0{,}01$?

193. Dokazati da $\sin x \to 1$ kad $x \to \dfrac{\pi}{2}$. Koje uslove mora zadovoljavati x u okolini tačke $x=\dfrac{\pi}{2}$ da bi bilo $1-\sin x<0{,}01$?

194. Kad x neograničeno raste funkcija $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ teži nuli tj. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{x^2+1}=0$. Koliki mora biti broj N da bi iz $|x|>N$ sledilo $y<\varepsilon$?

195. Kad $x \to \infty$, onda $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+3} \to 1$. Koliko mora biti N da bi iz $|x|>N$ sledilo $|y-1|<\varepsilon$?

§ 2. Beskonačno velike i beskonačno male veličine. Kriterijum postojanja granične vrednosti

Beskonačno velike i beskonačno male veličine

196. Funkcija u_n uzima vrednosti:

$$u_1=3, \quad u_2=5, \quad u_3=7, \quad \ldots, \quad u_n=2n\,1, \quad \ldots$$

Pokazati da u_n postaje beskonačno velika veličina kad $n \to \infty$. Počev od kojeg broja n će biti $u_n>N$?

197. Dokazati da opšti član u_n svakog aritmetičkog niza postaje beskonačno velika veličina kad $n \to \infty$. (Kad će ona biti pozitivna, a kad negativna?)

Da li ovo tvrđenje važi za svaki geometrijski niz?

198. Kad $x \to 0$ funkcija $y=\dfrac{1+2x}{x} \to \infty$. Koje uslove mora zadovoljavati x da bi bilo $|y|>10^4$?

199. Pokazati da funkcija $y=\frac{x}{x-3}$ postaje beskonačno velika kad $x \to 3$. Koliko mora biti x da bi $|y|$ bilo veće od 1000?

200. Kad x teži jedinici funkcija $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ neograničeno raste. Koliko mora biti δ da bi iz $|x-1|<\delta$ sledilo $\frac{1}{(x-1)^2}>N=10^4$?

201. Funkcija $y=\frac{1}{2^x-1}$ postaje beskonačno velika kad $x \to 0$. Kakve nejednačine mora zadovoljavati x da bi $|y|$ bilo veće od 100?

202. Kad $x \to \infty$ funkcija $y=\lg x \to \infty$. Koliko mora biti M da bi za $x>M$ bilo $y>N=100$?

203. Koje su od osnovnih elementarnih funkcija ograničene u svoj svojoj oblasti definisanosti?

204. Dokazati da je funkcija $\frac{x^2}{1+x^4}$ ograničena na celoj x-osi.

205. Je li funkcija $\frac{x^2}{1+x^6}$ ograničena na celoj x-osi? Je li ona ograničena u intervalu $(0, \infty)$?

206. Je li funkcija $\lg \sin x$ ograničena u svoj svojoj oblasti definisanosti? A funkcija $\lg \cos x$?

207. 1) Dokazati da su funkcije $x \sin x$ i $x \cos x$ neograničene kad $x \to \infty$ (za svaku od njih navesti bar po jedan takav niz x_n za koji niz odgovarajućih vrednosti $y_n \to \infty$.

2) Jesu li pomenute funkcije beskonačno velike?

3) Skicirati u osnovnim crtama grafike ovih funkcija.

208. Skicirati u osnovnim crtama grafike funkcija: $f(x)=2^{x \sin x}$ i $f(x)=$ $=2^{-x \sin x}$. Za svaku od ovih funkcija navesti po dva takva niza x_n i x_n' vrednosti nezavisno promenljive x za koje je $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$, a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')=0$.

209. Za koje će vrednosti osnove a funkcija $a^x \sin x$ biti neograničena kad $x \to +\infty$ (odnosno kad $x \to -\infty$)?

210. U svakom od sledećih slučajeva utvrditi da li je data funkcija, koja je inače neograničena za dato ponašanje argumenta x, istovremeno i beskonačno velika (za isto to ponašanje promenljive x):

1) $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ kad $x \to 0$;

2) $f(x)=x \operatorname{arctg} x$ kad $x \to \infty$;

3) $f(x)=2^x \arcsin(\sin x)$ kad $x \to +\infty$;

4) $f(x=(2+\sin x) \lg x$ kad $x \to +\infty$;

5) $f(x)=(1+\sin x) \lg x$ kad $x \to +\infty$;

211. Funkcija u_n uzima vrednosti:

$$u_1=2, \quad u_2=\frac{3}{4}, \quad u_3=\frac{4}{9}, \quad \ldots, \quad u_n=\frac{n+1}{n^2}, \quad \ldots$$

Pokazati da u_n postaje beskonačno mala veličina kad $n\to\infty$.

212. Funkcija u_n uzima vrednosti:

$$u_1=-7, \quad u_2=-\frac{1}{2}, \quad u_3=\frac{1}{27}, \quad u_4=\frac{1}{8}, \quad \ldots, \quad u_n=\frac{n^2-8}{n^3}, \quad \ldots$$

Pokazati da u_n postaje beskovačno mala veličina kad $n\to\infty$.

213. Dokazati da $y=\frac{x}{x+1}\to 0$ kad $x\to 0$. Koje uslove mora zadovoljavati promenljiva x da bi bilo $|y|<10^{-4}$?

214. Pokazati da funkcija $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ teži nuli kad $x\to\infty$. Koliko mora biti N da bi za $x>N$ bilo $y<\varepsilon$?

215. U svakom od sledećih slučajeva datu funkciju koja ima graničnu vrednost kad $x\to\infty$, predstaviti u obliku zbira konstante (jednake graničnoj vrednosti dotične funkcije) i neke funkcije; pokazati da ta funkcija, kad $x\to\infty$, postaje beskonačno mala.

1) $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}$; 2) $y=\dfrac{x^2}{2x^2+1}$; 3) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

Kriterijumi postojanja graničnih vrednosti

216*. Funkcija u_n uzima vrednosti:

$$u_1=\frac{1}{4}, \quad u_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}, \quad u_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{28}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad u_n=\frac{1}{3+1}+\frac{1}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3^n+1}.$$

Dokazati da u_n teži nekoj graničnoj vrednosti kad $n\to\infty$.

217. Funkcija u_n uzima vrednosti:

$$u_1=\frac{1}{2}, \quad u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}, \quad u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6}, \quad \ldots$$

$$\ldots, \quad u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 4\cdots(2n)}, \quad \ldots$$

Dokazati da u_n teži nekoj graničnoj vrednosti kad $n\to\infty$.

218. Dokazati stav: ako razlika dve funkcije pri istom ponašanju njihova argumenta, postaje beskonačno mala, i uz to je jedna od funkcija rastuća, a druga opadajuća, onda obe teže istoj graničnoj vrednosti.

219. Data su dva broja: u_0 i v_0 ($u_0 < v_0$). Članovi nizova u_n i v_n dati su obrascima

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2}, \quad v_1 = \frac{u_0 + 2\,v_0}{3};$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2}, \quad v_2 = \frac{u_1 + 2\,v_1}{3};$$

i uopšte

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}, \quad v_n = \frac{u_{n-1} + 2\,v_{n-1}}{3}.$$

Na osnovu stava iz prethodnog zadatka dokazati da oba niza u_n i v_n teže istoj graničnoj vrednosti koja leži između u_0 i v_0.

220. Dokazati da niz brojeva:

$$u_1 = \sqrt{6} \quad u_2 = \sqrt{6 + u_1}, \quad \ldots, \quad u_n = \sqrt{6 + u_{n-1}}, \quad \ldots$$

teži određenoj graničnoj vrednosti, i naći tu vrednost.

§ 3. Neprekidne funkcije

221. Funkcija $f(x)$ definisana je ovako:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x < 0, \\ x & \text{za} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ -x^2 + 4\,x - 2 & \text{za} \quad 1 \leqslant x < 3, \\ 4 - x & \text{za} \quad x \geqslant 3. \end{cases}$$

Je li ova funkcija neprekidna?

222. Tri cilindra, čiji su poluprečnici osnova respektivno 3, 2 i 1 m, a visine su im 5 m, postavljeni su jedan na drugi. Izraziti površinu poprečnog preseka tako dobijenog tela kao funkciju odstojanja preseka od donje osnove najnižeg cilindra. Hoće li ova funkcija biti neprekidna? Nacrtati njen grafik.

223. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{za} \quad x \leqslant 1, \\ 3 - ax^2 & \text{za} \quad x > 1. \end{cases}$$

Koliko mora biti a da bi ova funkcija bila neprekidna? (Nacrtati njen grafik).

224. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & \text{za} \quad x \leqslant -\dfrac{\pi}{2}; \\ A \sin x + B & \text{za} \quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}; \\ \cos x & \text{za} \quad x \geqslant \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Odrediti vrednosti A i B tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna, i nacrtati njen grafik.

225. U kojim tačkama su funkcije $\frac{1}{x-2}$ i $\frac{1}{(x+2)^2}$ prekidne? Nacrtati grafike obe funkcije. U čemu se sastoji razlika u ponašanju ovih funkcija u okolini tačaka prekida?

226. Funkcija $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-1}$ nije definicana za $x=1$. Kolika mora biti vrednost $f(1)$ da bi tako dopunski definisana funkcija postala neprekidna za $x=1$?

227. Koju vrstu prekida imaju funkcije $\frac{\sin x}{x}$ i $\frac{\cos x}{x}$ za $x=0$? Kakvi su njihovi grafici u okolini tačke $x=0$?

228. Ispitati neprekidnost funkcije $g(x)$ definisane ovako: $g(x)=\frac{|x|}{x}$ za $x\neq 0$, $g(0)=0$, i nacrtati njen grafik.

229. Koliko (i kakvih) tačaka prekida ima funkcija $\frac{1}{\lg|x|}$? Skicirati u osnovnim crtama grafik.

230. Funkcija $y=\operatorname{arctg} x$ nije definisana za $x=0$. Može li se ova funkcija dopunski definisati u tački $x=0$ da bi ona postala neprekidna u toj tački? Skicirati u osnovnim crtama njen grafik.

231. Ispitati neprekidnost funkcije definisane ovako:

$$f(x)=\sin\frac{\pi}{2x} \quad \text{za} \quad x\neq 0, \; f(0)=1.$$

Prikazati u osnovnim crtama njen grafik.

232. Prikazati u osnovnim crtama grafik funkcije $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$. Koliko mora biti $f(0)$ da bi tako „dopunjena" funkcija $f(x)$ bila svuda neprekidna?

233. Pokazati da funkcija $\frac{1}{1+2^{1/x}}$ ima u tački $x=0$ prekid prve vrste. Skicirati u osnovnim crtama njen grafik u okolini tačke $x=0$.

234. Ispitati karakter prekida funkcije $g(x)=2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$ u tački $x=1$. Može li se ova funkcija „dopuniti" za $x=1$ tako da postane neprekidna i u ovoj tački?

235. Ispitati karakter prekida funkcije $y=\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ u tački $x=0$.

236. Funkcija $f(x)$ definisana je ovako:

$$f(x)=(x+1)\cdot 2^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x|}\right)} \quad \text{za} \quad x\neq 0, \; f(0)=0.$$

Uveriti se u to da u intervalu $-2 \leqslant x \leqslant 2$ ova funkcija uzima sve vrednosti između $f(-2)$ i $f(2)$, a da je ipak prekidna (u kojoj tački). Prikazati u glavnim crtama njen grafik.

237. Ispitati neprekidnost funkcije $\frac{1}{1+2^{\operatorname{tg} x}}$. Šta je karakteristično za njen grafik?

238. Funkcija $f(x)$ definicana je ovako.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ kad god je } x \text{ racionalan broj,} \\ x \text{ kad god je } x \text{ iracionalan broj.} \end{cases}$$

Za koju je vrednost x ova funkcija neprekidna?

239. Ispitati neprekidnost i nactrtati grafik funkcije:

1) $y = x - E(x)$; 2) $y = \frac{1}{x - E(x)}$; 3) $y = (-1)^{E(x)}$.

($E(x)$ je najveći ceo broj koji nije veći od x, — uporedi i zad. 59).

240. Na osnovu osobina neprekidnih funkcija pokazati da jednačina $x^5 - 3x = 1$ ima bar jedan koren koji leži između 1 i 2.

241*. Pokazati da: a) polinom neparnog stepena mora imati bar jednu realnu nulu; b) polinom parnog stepena mora imati najmanje dve realne nule ako bar jedna njegova vrednost ima znak suprotan znaku koeficijenta uz najviši stepen argumenta.

242. Pokazati da jednačina $x \cdot 2^x = 1$ ima bar jedan koren manji od jedinice.

243. Pokazati da jednačina $x = a \sin x + b$, u kojoj je $0 < a < 1$, $b > 0$, ima bar jedan pozitivan koren, ne veći od $b + a$.

244*. Pokazati da jednačina $\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$, u kojoj je $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, i $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, ima dva realna korena, jedan između λ_1 i λ_2, a drugi između λ_2 i λ_3.

§ 4. Određivanje graničnih vrednosti. Upoređivanje beskonačno malih veličina

Funkcije celobrojnog argumenta

U zadacima 245—267 naći granične vrednosti:

245. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{n}$. **246.** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$. **247.** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$.

248. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 + 15n}$. **249.** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0{,}001n^4 - 100n^3 + 1}$.

250. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^4 + (n-1)^4}$. **251.** $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n-1)^4}{(2n+1)^4 + (n-1)^4}$.

252. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

253. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$.

254. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$.

255. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt[3]{n^4+1}}{\sqrt[4]{n^6+6n^5+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3+1}}$

256. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$

257. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!-n!}$.

258. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

259. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

260. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$.

261. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+n)$.

262. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

263. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

264*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$.

265. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

266. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$;

267. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}$.

Funkcije neprekidnog argumenta

U zadacima 268—304 naći granične vrednosti.

268. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^2-3}$.

269. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

270. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{1-x}$.

271. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

272. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

273. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

274. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

275. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

276. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

277. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{\text{[illegible]}}{1-x^3}\right)$.

278. $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{1}{x(x-2)^2} - \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right]$.

279. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x+2}{x^2-5x+4} + \dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right]$.

280. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m i n su celi pozitivni brojevi).

281. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

282. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

283. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

284. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1+x-3x^3}{1\,\text{[illegible]}\,x^2+3x^3}$.

285. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1} - x\right)$.

286. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1} - \dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

287. $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\dfrac{3x^2}{2x+1} - \dfrac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right]$.

288. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+\cdots+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}$.

289. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-x}$.

290. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$.

291. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^7+3}+\sqrt{2x^3-1}}{\sqrt[6]{x^8+x^7+1}-x}$.

292. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4+3}-\sqrt[5]{x^3+4}}{\sqrt[3]{x^7+1}}$.

293. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

294. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

295. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

296. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

297. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

298. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

299. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

300. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$.

301. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$ $(a>b)$.

302. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ *(m i n su celi pozitivni brojevi).*

303*. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

304. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$.

305. Kako se menjaju koreni kvadratne jednačine $ax^2+bx+c=0$ kad b i c ne menjaju svoje vrednosti $(b\neq 0)$, a a teži nuli?

U zadacima 306—378 naći granične vrednosti. (U zadacima u kojima stoji $x \to \pm\infty$ treba posebno razmotriti slučajeve kad $x \to +\infty$ i kad $x \to -\infty$).

306. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

307. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

308. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$.

309. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

310. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.

311. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$.

312. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$.

313. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})$.

---

314. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$.

315. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

316. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$.

317. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

318. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin (\alpha^n)}{(\sin \alpha)^m}$ (*m* i *n* su celi pozitivni brojevi).

319. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

320. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\operatorname{arctg} x}$.

321. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

322. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

323. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$.

324. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

325. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$.

326. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\sin^3\alpha}$,

327. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.

328. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

329. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$.

330. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

331. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$.

332. $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\dfrac{\sin\alpha}{1-\dfrac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

333. $\lim\limits_{z\to 1}(1-z)\operatorname{tg}\dfrac{\pi z}{2}$.

334. $\lim\limits_{y\to a}\left(\sin\dfrac{y-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi y}{2a}\right)$.

335. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

336. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$.

337. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{4}-\sin\dfrac{x}{4}\right)}$.

338. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

339. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$.

340. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

341. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$.

342. $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$.

343. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(a+2h)-2\sin(a+h)+\sin a}{h^2}$.

344. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2h)-2\operatorname{tg}(a+h)+\operatorname{tg} a}{h^2}$

345. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

346. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

347. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}$.

348. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

349. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg} 3x}-\sqrt[3]{1-\arcsin 3x}}{\sqrt{1-\arcsin 2x}-\sqrt{1-\operatorname{arctg} 2x}}$.

350*. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$.

---

351. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

352. $\lim\limits_{t \to \infty} \left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$.

353. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$

354. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

355. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

356. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

357. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

358. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

359. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$.

360. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

361. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

362. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$.

363. $\lim\limits_{x \to 0} (1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

364. $\lim\limits_{x \to 0} (+1\ \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

365. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

366. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

367. $\lim\limits_{x \to \infty} \{x[\ln(x+a)-\ln x]\}$.

368. $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

369. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h-1}{h}$.

370. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

371. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x-e}{x-1}$.

372*. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

373. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

374. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}$

375. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$.

376. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

377. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)$.

378. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{th} x$.

Razni zadaci sa određivanjem graničnih vrednosti

U zadacima 379—401 naći granične vrednosti.

379. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(ax+1)^n}{x^n + A}$. Posebno razmotriti slučajeve kad je n: 1) ceo pozitivan broj; 2) ceo negativan broj; 3) nula.

380. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}\right)$.

381. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a^x}{a^x + 1}$ $(a>0)$.

382. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$ $(a>0)$.

383. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

384. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

385. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$.

386. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arcsin x}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}}$.

387. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(a+3h) - 3\sin(a+2h) + 3\sin(a+h) - \sin a}{h^3}$.

388. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x\left(\sqrt{2\sin^2 x + 3\sin x + 4} - \sqrt{\sin^2 x + 6\sin x + 2}\right)$.

389. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$.

390*. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{4}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$.

391. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1 - \cos\dfrac{1}{x}\right)$.

392. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}\right)$.

393*. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

394. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{x+2} - \operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}\right)$.

395*. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

396. $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^n}\right)^x \quad (n>0).$

397*. $\lim\limits_{x \to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}},$

398. $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\ln \cos x}{x^2}.$

399. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}.$

400. $\lim\limits_{x \to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

401. $\lim\limits_{x \to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}.$

Upoređivanje beskonačno malih veličina

402. Beskonačno mala veličina u_n uzima vrednosti:

$$u_1+1,\quad u_2=\frac{1}{2},\quad u_3=\frac{1}{3},\ \ldots,\quad u_n=\frac{1}{n},\ \ldots,$$

a beskonačno mala veličina v_n uzima vrednosti:

$$v_1=1,\quad v_2=\frac{1}{2!},\quad v_3=\frac{1}{3!},\ \ldots,\quad v_n=\frac{1}{n!},\ \ldots$$

Uporediti veličiue u_n i v_n. Koja je od njih beskonačno mala višeg reda?

403. Funkcija u_n uzima vrednosti

$$u_1=0,\quad u_2=\frac{3}{8},\quad u_3=\frac{8}{27},\ \ldots,\quad u_n=\frac{n^2-1}{n^3},\ \ldots,$$

a funkcija v_n uzima vrednosti

$$v_1=2,\quad v_2=\frac{5}{8},\quad v_3=\frac{10}{27},\ \ldots,\quad v_n=\frac{n^2+1}{n^3},\ \ldots$$

Uporediti ove beskonačno male veličine.

404. Beskonačno mala veličina u_n uzima vrednosti:

$$u_1=0,\quad u_2=\frac{1}{4},\quad u_3=\frac{2}{9},\ \ldots,\quad u_n=\frac{n-1}{n^2},\ \ldots,$$

a beskonačno mala veličina v_n uzima vrednosti:

$$v_1=3,\quad v_2=\frac{5}{4},\quad v_3=\frac{7}{9},\ \ldots,\quad v_n=\frac{2n+1}{n^2},\ \ldots$$

Pokazati da su veličine u_n i v_n beskonačno male istog reda, ali da nisu ekvivalentne.

405. Kad $x \to 1$ funkcije $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ i $\rho(x)=1-\sqrt{x}$ postaju bezkonačno male. Koja je od njih višeg reda?

406. Ako je $y=x^3$ pokazati da su Δy i Δx kad $x \to 0$, u opštem slučaju beskonačno male istog reda.

Za koju će se vrednost promenljive x red prvog priraštaja razlikovati od reda onog drugog?

Za koju će vrednost promenljive x priraštaji Δy i Δx biti ekvivalentni?

407. Pokazati da funkcije $1-x$ i $1-\sqrt[3]{x}$ kad $x \to 1$ postaju beskonačno male istog reda. Da li su ekvivalentne?

408. Kad $x \to 0$ funkcija $\sqrt{a+x^3}-\sqrt{a}$ $(a>0)$ postaje beskonačno mala veličina. Odrediti njen red u odnosu na x.

409. Funkcije navedene u sledećim zadacima postaju beskonačno male kad $x \to 0$; odrediti njihov red u odnosu na x.

1) $x^3+1000x^2$; 2) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}$; 3) $\dfrac{x(x+1)}{1+\sqrt{x}}$; 4) $\dfrac{7x^{10}}{x^3+1}$.

410. Dokazati da su priraštaji funkcija $u=\sqrt{x}$ i $v=bx^2$ za $x>0$ i kad zajednički priraštaj $\Delta x \to 0$, beskonačno male istog reda. Za koju će vrednost promenljive x oni biti ekvivalentni (a i b su različiti od nule)?

411. Pokazati da funkcije $1-x$ i $a(1-\sqrt[k]{x})$ $(x\neq 0$, a k je ceo pozitivan broj), kad $x \to 1$ postaju beskonačno male istog reda. Za koju će vrednost a one biti ekvivalentne?

412. Dokazati da, kad $x \to \dfrac{\pi}{2}$ funkcije $\sec x - \operatorname{tg} x$ i $\pi - 2x$ postaju beskonačno male istog reda. Hoće li biti ekvivalentne?

413. Dokazati da su, kad $x \to 0$, beskonačno male $e^{2x}-e^x$ i $\sin 2x - \sin x$ ekvivalentne.

414. Odrediti red beskonačno male u odnosu na x kad $x \to 0$;

1) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}-1$; 2) $\sqrt{1+2x}-1-\sqrt{x}$; 3) $e^{\sqrt{x}}-1$;

4) $e^{\sin x}-1$; 5) $\ln(1+\sqrt{x\sin x})$; 5) $\sqrt{1+x^2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$;

7) $e^x-\cos x$; 8) $e^{x^2}-\cos x$; 9) $\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$;

10) $\sin(\sqrt{1+x}-1)$; 11) $\ln(1+x^2)-2\sqrt[3]{(e^x-1)^2}$;

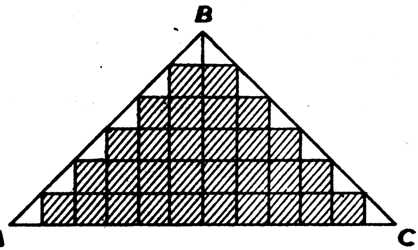
12) $\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)$.

Neki geometrijski zadaci

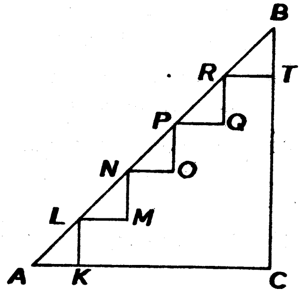
415. Dat je jednakostranični trougao čija je stranica a; od njegovih visina obrazovan je novi jednakostranični trougao, i tako n puta uzastopce. Naći graničnu vrednost zbira površina svih ovih trouglova kad $n \to \infty$.

416. U krug poluprečnika R upisan je kvadrat, u kvadrat je upisan krug, u ovaj novi krug je opet upisan kvadrat, i tako n puta uzastopce. Naći graničnu vrednost zbira površina svih krugova, i graničnu vrednost zbira površina svih kvadrata kad $n \to \infty$.

417. U jednakokrako pravougli trougao čija je osnovica podeljena na $2n$ jednakih delova upisana je stepeničasta figura (sl. 15); površina trougla je P, a stepeničaste figure S. Dokazati da razlika $P-S$ postaje beskonačno mala veličina kad n neograničeno raste.



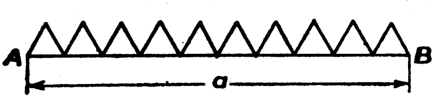
Sl. 15



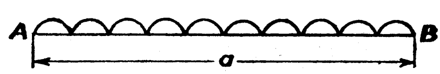
Sl. 16.

418. Hipotenuza jednakokrako pravouglog trougla, čija je kateta a, podeljena je na n jednakih delova, i iz svake deone tačke povučeni su pravolinijski odsečci tako da obrazuju izlomljenu liniju sličnu liniji $AKLMNOPQRTB$ na sl. 16. Dužina ove izlomljene linije, za svaku vrednost n, je $2a$, pa je i njena granična vrednost $2a$. Međutim, kad n neograničeno raste, pomenuta izlomljena linija se neograničeno približava hipotenuzi trougla. Iz toga bi sledilo da je dužina hipotenuze jednaka zbiru kateta. U čemu je greška kod ovakvog rasuđivanja?

419. Odsečak AB, čija je dužina a, podeljen je na n jednakih delova, a iz deonih tačaka povučeni su pravolinijski odsečci pod uglovima $\frac{\pi}{2n}$ kao na sl. 17. Naći graničnu vrednost dužine tako dobijene „testeraste" izlomljene linije kad n neograničeno raste i uporediti rezultat sa onim u prethodnom zadatku.



Sl. 17.

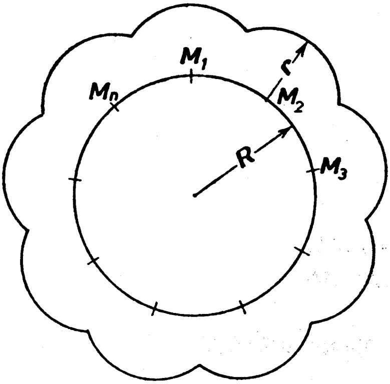


Sl. 18.

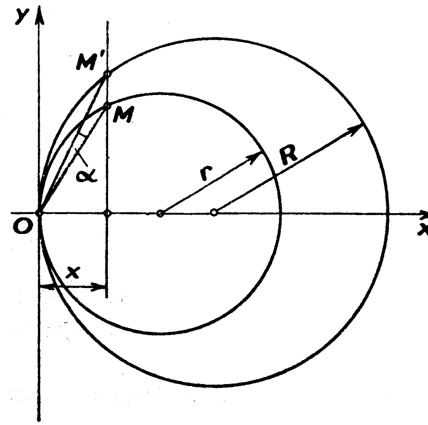
420. Odsečak AB, dužine a, podeljen je na n jednakih delova, i nad svakim od ovih delova konstruisan je kružni luk koji odgovara centralnom uglu od $\frac{\pi}{n}$ radijana. (Sl. 18). Naći graničnu vrednost dužine tako dobijene linije kad $n \to \infty$. Kako će se promeniti rezultat ako se nad svakim od n podelaka konstruiše polukrug?

421. Krug poluprečnika R podeljen je tačkama M_1, M_2, ..., M_n na jednake delove. Iz svake deone tačke kao centra konstruisan je kružni luk poluprečnika r do preseka sa istim takvim lukom povučenim iz susednih tačaka

(Sl. 19). Naći graničnu vrednost dužine tako dobijene zatvorene linije kad n neograničeno raste.



Sl. 19



Sl. 20

422 Dva kruga poluprečnika R i r $(R>r)$ dodiruju u koordinatnom početku y-osu i leže desno od nje (sl. 20). Kog je reda u odnosu na x beskonačno mali odsečak MM' i beskonačno mali ugao α kad $x \to 0$?

423. Centar O spojen je pravolinijskim odsečkom OP sa tačkom P van kruga. Iz tačke P povučena je tangenta PT na krug, a iz tačke T — normala TN na pravu OP; odsečak OP preseca krug u tački A. Dokazati da su odsečci AP i AN ekvivalentne beskonačno male veličine kad se tačka P neograničeno približava tački N.

424. U krajnjim tačkama kružnog luka AB, a isto tako i u tački koja leži na sredini ovog luka, povučene su tangente, a tačke A i B spojene su tetivom. Dokazati da odnos površina dvaju trouglova koji se pri tom dobijaju teži ka 4 kad se luk AB neograničeno smanjuje.

Numerički zadaci

425. Koristeći ekvivalentnost funkcija $\sqrt{1+x}-1$ i $\frac{1}{2}x$ kad $x \to 0$ izračunati približno: $\sqrt{105}$; 2) $\sqrt{912}$; 3) $\sqrt{260}$; 4) $\sqrt{1632}$; 5) $\sqrt{0{,}31}$; 6) $\sqrt{0{,}021}$.

426. Pokazati da kad $x \to 0$ funkcije $\sqrt[n]{1+x}-1$ i $\frac{x}{n}$ postaju ekvivalentne beskonačno male veličine. Iskoristiti rezultat za približno izračunavanje korena:

1) $\sqrt[3]{1047}$; 2) $\sqrt[4]{8144}$; 3) $\sqrt[7]{1{,}1}$; 4) $\sqrt[3]{1080}$.

Naći vrednosti ovih korena i pomoću logaritama, pa uporediti rezultate.

427. Iskoristiti ekvivalentnost beskonačno malih veličina $\ln(1+x)$ i x kad $x \to 0$ za približno izračunavanje logaritama sledećih brojeva: 1,01; 1,02; 1,1; 1,2. Naći dekadne logaritme tih istih brojeva i uporediti sa onima iz tablica.

(Ova stranica je ostavljena prazna)

REZULTATI

176. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$, $n > 4$. **177.** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. **178.** $n = 19\,999$

179. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; $n > 1000$. Među vrednostima v_n ima ih i većih, i manjih od granične vrednosti, i jednakih njoj.

180. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; $n > 14$; $n > \log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}$.

181. $n > \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}$, ako je $\varepsilon < \dfrac{5}{6}$, $n = 0$, ako je $\varepsilon > \dfrac{5}{6}$.

182. $n > \dfrac{a}{\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}}$; niz u_n je opadajući.

183. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$; v_n dostiže svoju graničnu vrednost za $n = m+1$, pošto počev od ove vrednosti postaje $v_n = 0$.

185. 0. 186. 1) Nema. 2) ima.

189. Za $a=0$ ova granična vrednost može biti bilo koji broj, a može i da ne postoji.

190. $\delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$; $\delta < 0{,}00025$. 191 $\delta < 2 - \sqrt{3}$. 192. $\delta < \dfrac{2}{13}$.

193. $\left| x - \dfrac{\pi}{2} \right| < \dfrac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}99 \approx 0{,}136$.

194. $N \geqslant \sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon} - 1}$, ako je $\varepsilon \leqslant 1$; $N = 0$, ako je $\varepsilon > 1$.

195. $N \geqslant \sqrt{\dfrac{4}{\varepsilon} - 3}$, ako je $\varepsilon \leqslant \dfrac{4}{3}$; $N = 0$, ako je $\varepsilon > \dfrac{4}{3}$. 196. $n > \dfrac{N-1}{2}$.

197. u_n je pozitivna beskonačno velika veličina ako je razlika $d>0$, a negativna ako je $d<0$. Za geometrijski niz tvrđenje važi samo ako je količnik po apsolutnoj vrednosti veći od jedinice.

198. $-\dfrac{1}{10^4+2} < x < \dfrac{1}{10^4-2}$. 199. $\dfrac{3000}{1001} < x < \dfrac{3000}{999}$.

200. $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{N}} = 0{,}01$. 201. $\log_2 0{,}99 < x < \log_2 1{,}01$.

202. $M > 10\,N = 10^{100}$.

203. $\sin x$, $\cos x$ i sve funkcije inverzne trigonometriskim.

205. Nije. Jeste. 206. Nije.

207. 1) Naprimer $x_n = \dfrac{\pi}{2} + 2\,n\pi$ i $x_n = 2\,n\pi$; 2) Nisu.

209. Za $a>1$ funkcija je neograničena kad $x \to \infty$ (ali nije beskonačno velika); kad $x \to -\infty$ ona teži nuli. Za $a=1$ funkcija je ograničena na celoj brojnoj osi.

210. 1), 3) i 5) —ne; 2) i 4) —da. 213. $\dfrac{-1}{10001} < x < \dfrac{1}{9999}$.

214. $N > \left(\dfrac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2$.

215. 1) $y = 1 + \dfrac{1}{x^3-1}$; 2) $y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-1}{2(2x^2+1)}$; 3) $y = -1 + \dfrac{2}{1+x^2}$.

216*. Uporediti u_n sa zbirom članova geometriskog niza $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \ldots, \dfrac{1}{3^n}$.

220. 3. 221. Nije.

222. $f(x) = 9\pi$ za $0<x<5$; $f(x) = 4\pi$ za $5<x<10$; $f(x) = \pi$ za $10<x<15$. Funkcija je prekidna za $x=5$ i za $x=10$.

223. $a=1$. 224. $A=-1$, $B=1$. 225. $x=2$; $x=-2$. 226. $\dfrac{2}{3}$.

227. Funkcija $\frac{\sin x}{x}$ ima u tački $x=0$ prekid koji se može odstraniti, dok funkcija $\frac{\cos x}{x}$ ima prekid druge vrste (beskonačan).

228. Funkcija je prekidna za $x=0$.

229. Funkcija ima tri tačke prekida. Za $x=0$ ima prekid koji se može odstraniti, za $x=\pm 1$ ima prekid druge vrste (beskonačan).

230. Ne može. Ako $x\to 0$ s desna, onda $y\to\frac{\pi}{2}$, a ako $x\to 0$ s leva, onda, $y\to-\frac{\pi}{2}$.

231. Funkcija je prekidna za $x=0$. 232. 0.

234. Ne može. Ako $x\to 1$ s desna, onda $g(x)\to 1$, ako $x\to 1$ s leva, $g(x)\to 0$.

235. Ako $x\to 0$ s desna, onda $y\to 1$, a ako $x\to 0$ s leva, $y\to -1$.

236. Za $x=0$ funkcija ima prekid (prve vrste).

237. Funkcija ima prekide prve vrste u tačkama $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$,

238. Za $x=0$ funkcija je neprekidna, za $x\neq 0$ je prekidna.

239. Sve tri funkcije su prekidne za $x=$ celom broju (pozitivnom, negativnom ili nuli)

241*. Napisati polinom u obliku $x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}\right)$ i ispitati njegovo ponašanje kad $x\to\pm\infty$.

244*. Nacrtati u osnovnim crtama grafik funkcije $y=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$, ispitavši prethodno njeno ponašanje u okolini tačaka $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

245. 1. 246. $\frac{1}{2}$. 247. 3. 248. ∞. 249. 0. 250. 0. 251. $\frac{15}{17}$.

252. 1. 253. 0. 254. 4. 255. 1. 256. 0. 257. 0. 258. 0. 259. 1.

260. $\frac{4}{3}$. 261. $\frac{1}{2}$. 262. $-\frac{1}{2}$. 263. -1. 264*. 1. Iskoristiti: $\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{n}$. 265. $\frac{1}{2}$. 266. 1. 267. 0. 268. 9. 269. $\frac{3}{4}$.

270. ∞. 271. 0. 272. 0. 273. $-\frac{2}{5}$. 274. $\frac{1}{2}$. 275. 6. 276. ∞.

277. -1. 278. ∞. 279. 0. 280. $\frac{m}{n}$. 281. 0. 282. ∞. 283. $\frac{1}{2}$.

284. -1. 285. 0. 286. $\frac{1}{4}$. 287. $-\frac{1}{2}$. 288. 100. 289. -1.

290. 1. 291. ∞. 292. 0. 293. 0. 294. ∞. 295. 4. 296. $\frac{1}{4}$. 297. 3.

298. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ako je $x>0$; ∞, ako je $x=0$. 299. $\frac{1}{3}$. 300. $\frac{2}{3}$.

301. $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. 302. $\frac{m}{n}$. 303*. $\frac{1}{2}$ U brojitelju dodati i oduzeti jedinicu.

304. $-\frac{1}{4}$. 305. Jedan koren teži graničnoj vrednosti $-\frac{c}{b}$, a drugi beskonačnosti

306. 0. **307.** 0. **308.** 0, ako $x \to +\infty$; ∞, ako $x \to -\infty$.

309. $\frac{1}{2}$, ako $x \to +\infty$; $-\infty$, ako $x \to -\infty$.

310. $\frac{a+b}{2}$, ako $x \to +\infty$; ∞, ako $x \to -\infty$. **311.** $\pm\frac{5}{2}$. **312.** 0. **313.** 1.

314. 3. **315.** k. **316.** $\frac{\alpha}{\beta}$. **317.** $\frac{2}{5}$.

318. 0, ako je $n>m$; 1, ako je $n=m$; ∞, ako je $n<m$. **319.** $\frac{2}{3}$. **320.** $\frac{1}{3}$.

321. $\frac{1}{2}$. **322.** $\frac{3}{4}$. **323.** ∞. **324.** -1. **325.** $\frac{1}{2}$. **326.** ∞. **327.** 0.

328. $\frac{1}{2}$. **329.** ∞. **330.** $-\frac{3}{2}$. **331.** 1. **332.** $\frac{\pi}{2}$. **333.** $\frac{2}{\pi}$.

334. $-\frac{a}{\pi}$. **335.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **336.** 2. **337.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **338.** -2.

339. $-2\sin a$. **340.** $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$. **341.** $\cos^3\alpha$. **342.** $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$. **343.** $-\sin\alpha$.

344. $\frac{2\sin a}{\cos^3 a}$. **345.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **346.** 1. **347.** 6. **348.** $\frac{3}{2}$. **349.** -1.

350*. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Staviti $\arccos x = y$. **351.** $\frac{1}{e}$. **352.** $\frac{1}{e}$. **353.** 1.

354. e^{mk}. **355.** e^6. **356.** $e^{-\frac{2}{3}}$. **357.** e^2.

358. 0. ako $x \to +\infty$; ∞, ako $x \to -\infty$. **359.** ∞, ako $x \to +\infty$; 0, ako $x \to -\infty$.

360. 1. **361.** ∞, ako $x \to +\infty$; 0, ako $x \to -\infty$.

362. e^2. **363.** e. **364.** $\sqrt{e}$. **365.** k. **366.** $\frac{1}{a}$. **367.** a. **368.** $\frac{1}{e}$.

369. $\ln a$. **370.** $\frac{2}{3}$. **371.** e. **372*.** $\frac{3}{2}$; u brojitelju dodati i oduzeti jedinicu. **373.** 2. **374.** 1. **375.** $a-b$. **376.** 1.

377. 0, ako $x \to +\infty$; ∞, ako $x \to -\infty$.

378. 1, ako $x \to +\infty$; -1, ako $x \to -\infty$.

379. 1) a^n; 2) 0, ako je $A \neq 0$, a^n, ako je $A=0$ i $a \neq 0$, i ∞, ako je $A=a=0$; 3) $\frac{1}{1+A}$.

380. 0, ako $x \to +\infty$; $-\infty$, ako $x \to -\infty$.

381. Za $a>1$ granična vrednost je 1 kad $x \to +\infty$, a 0 kad $x \to -\infty$; za $a<1$ je obrnuto; za $a=1$ granična vrednost je $\frac{1}{2}$.

382. Za $a>1$ granična vrednost je 1 kad $x \to +\infty$, $a-1$ kad $x \to -\infty$. Za $a<1$ je obrnuto. Za $a=1$ granična vrednost je 0.

383. 0. **384.** 0. **385.** 1. **386.** 0. **387.** $-\cos a$. **388.** $\frac{1}{12}$. **389.** $\frac{1}{8}$

390*. $\frac{\sin x}{x}$. Pomnožiti i podeliti sa $\sin\frac{x}{2^n}$. **391.** $\frac{1}{2}$. **392.** 0.

393*. $-\frac{1}{2}$. Primeniti obrazac $\operatorname{arctg} b-\operatorname{arctg} a=\operatorname{arctg}\frac{b-a}{1+ab}$. **394.** $\frac{1}{2}$.

395*. $\frac{1}{2}$. Zameniti $\arcsin x$ sa $\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ i postupiti kao u zad. 393.

396. ∞ — ako je $n<1$; e — ako je $n=1$; 1 — ako je $n>1$.

397*. 1. Zameniti $\cos x$ izrazom: $1-(1-\cos x)$.

398. $-\frac{1}{2}$. **399.** $\frac{1}{e}$. **400.** e. **401.** e^{ab}.

402. v_n je beskonačno mala višega reda.

403. u_n i v_n su ekvivalentne beskonačno male. **405.** Istog su reda.

406. Za $x=0$ biće različitog reda. Za $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ priraštaji Δy i Δx su ekvivalentne beskonačno male.

407. Nisu. **408.** Trećeg reda. **409.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) 10.

410. $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b^2}}$. **411.** $a=k$. **412.** Neće.

414. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) ekvivalentna beskonačno mala; 5) ekvivalentna beskonačno mala; 6) 1; 7) ekvivalentna beskonačno mala; 8) 2; 9) 2; 10) 1; 11) $\frac{2}{3}$; 12) 2.

415. $a^2\sqrt{3}$. **416.** $2\pi R^2$; $4R^2$.

418. Iz toga što izlomljena linija neograničeno prilazi pravoj (u smislu približavanja njihovih tačaka) ne sledi da dužina izlomljene linije teži dužini odsečka.

419. a. **420.** a, $\frac{\pi a}{2}$. **421.** $2\pi(R+r)$.

422. I odsečak i ugao imaju red $\frac{1}{2}$.

425. 1) 10,25; 2) 30,2; 3) 16,125; 4) 40,4; 5) 0,558; 6) 0,145.

426. 1) 10,16; 2) 20,12; 3) 1,02; 4) 4,04.

427. $\ln 1{,}01\approx 0{,}01$, $\ln 1{,}02\approx 0{,}02$, $\ln 1{,}1\approx 0{,}1$, $\ln 1{,}2\approx 0{,}2$.